第 57 卷　第 2 期　　中山大学学报（自然科学版）　　Vol. 57　No. 2
2018 年　3 月　　ACTA　SCIENTIARUM　NATURALIUM　UNIVERSITATIS　SUNYATSENI　　Mar.　2018

DOI：10. 13471/j. cnki. acta. snus. 2018. 02. 010

# 时间尺度上非 Chetaev 型非完整系统的 Lie 对称性及其守恒量*

林魏，朱建青
（苏州科技大学数理学院，江苏 苏州 215009）

**摘　要：**研究了时间尺度上非 Chetaev 型非完整系统的 Lie 对称性及其守恒量。首先，给出了时间尺度上非 Chetaev 型非完整系统的运动微分方程；然后，基于微分方程在无限小变换下的不变性，得到了确定方程，给出了非 Chetaev 型非完整系统下的限制方程，进而建立了时间尺度上非 Chetaev 型非完整系统的 Lie 对称性及其守恒量；最后，举例说明其结果的应用。

**关键词：**时间尺度；非 Chetaev 型；非完整系统；Lie 对称性；守恒量

**中图分类号：**O316　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**0529 – 6579（2018）02 – 0076 – 04

# The Lie symmetry and conserved quantity for nonholonomic systems of non-Chetaev's type on time scales

*LIN Wei*, *ZHU Jianqing*
(College of Mathematics and Physics, Jiangsu University of Science and Technology, Suzhou 215009, China)

**Abstract**: The Lie symmetry and conserved quantity for nonholonomic systems of non-Chetaev's type on time scales are studied. Firstly, the differential equations of motion for nonholonomic systems of non-Chetaev's type on time scales are given. Secondly, based on the invariance of differential equation under the infinitesimal transformations, the determinating equation is established and the restriction equations for nonholonomic systems of non-Chetaev's type are given. Then, the Lie theorem and conserved quantity for nonholonomic systems of non-Chetaev's type on time scales are built. Finally, an example is given to illustrate the application of the results.

**Key words**: time scales; non-Chetaev's type; nonholonomic systems; Lie symmetry; conserved quantity

对称性与守恒量的研究是近代分析力学发展的一个重要方向。寻求守恒量的近代方法主要有两种：一种是基于微分变分原理在无限小群变换下的 Noether 理论；另一种是基于运动微分方程在无限小变换群下的不变性的 Lie 理论。自 Lutzky 等[1]将 Lie 对称性推广到了力学系统的研究中，已取得了很多重要成果[2-9]。

1988 年 Stefan Hilger 提出了测度链上微积分理论[10-12]，则将连续系统与离散系统的研究统一了起来，使得动力学系统的研究更具一般性。近年来，时间尺度上微积分理论的应用不仅扩展到了物理学、最优控制、工程等领域[13-17]，还在动力学系统的对称性与守恒量的研究中取得了一些重要的成果[18-27]。然而，关于时间尺度上 Lie 对称性及

* **收稿日期：**2017 – 06 – 26
**基金项目：**国家自然科学基金（11572212）；苏州科技大学研究生科研创新计划（SKCX16_057）
**作者简介：**林魏（1991 年生），女；**研究方向：**工程中的数学技术；E-mail：2247890060@ qq. com
**通信作者：**朱建青（1962 年生），男；**研究方向：**应用数学；E-mail：zjq@ mail. usts. edu. cn

其守恒量的研究尚刚刚起步。本文将试图对时间尺度上非 Chetaev 型非完整系统的 Lie 对称性与守恒量进行些研究。文章将基于时间尺度上非 Chetaev 型非完整系统的运动微分方程在群的无限小变换下的不变性，建立时间尺度上非 Chetaev 型非完整系统的 Lie 对称性的确定方程、结构方程以及该系统下的守恒量形式。并通过算例说明其应用。

## 1　时间尺度上非 Chetaev 型非完整系统的运动方程

文中所涉及时间尺度上的微积分理论的定义及其相关性质请参阅文献［13］。

假设系统的位形由 $n$ 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定，系统的运动受时间尺度上 $g$ 个双面理想非 Chetaev 型非完整约束

$$f_\beta(t,\boldsymbol{q}^\sigma,\boldsymbol{q}^\Delta)=0,(\beta=1,2,\cdots,g) \tag{1}$$

非完整约束（1）加在虚位移 $\delta q_s^\sigma$ 上的限制条件为

$$f_{\beta s}\delta q_s^\sigma=0,(s=1,2,\cdots,n;\beta=1,2,\cdots,g) \tag{2}$$

时间尺度上 Lagrange 函数为

$$L=L(t,\boldsymbol{q}^\sigma(t),\boldsymbol{q}^\Delta(t)) \tag{3}$$

则时间尺度上 Lagrange 非完整力学系统的微分方程为

$$\frac{\Delta}{\Delta t}\frac{\partial L}{\partial q_s^\Delta}-\frac{\partial L}{\partial q_s^\sigma}=Q''_s+\lambda_\beta f_{\beta s} \tag{4}$$

其中 $Q''_s=Q''_s(t,\boldsymbol{q}^\sigma,\boldsymbol{q}^\Delta)$ 为非势广义力，$\lambda_\beta$ 为约束乘子。假设系统非奇异，即

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q_k^\Delta\Delta q_s^\Delta}\right)\neq 0,(k=1,2,\cdots,n) \tag{5}$$

方程（4）可表示为

$$\frac{\Delta}{\Delta t}\frac{\partial L}{\partial q_s^\Delta}-\frac{\partial L}{\partial q_s^\sigma}=Q''_s+\Lambda_s \tag{6}$$

其中

$$\Lambda_s=\Lambda_s(t,\boldsymbol{q}^\sigma,\boldsymbol{q}^\Delta)=\lambda_\beta(t,\boldsymbol{q}^\sigma,\boldsymbol{q}^\Delta)f_{\beta s} \tag{7}$$

由系统的非奇异性，可由方程（6）解得所有广义加速度，记作

$$q_s^{\Delta\Delta}=g_s(t,\boldsymbol{q}^\sigma,\boldsymbol{q}^\Delta),(s=1,2,\cdots,n)) \tag{8}$$

称方程（8）为与时间尺度上非完整力学系统（1）和（4）与之相应的时间尺度上完整系统的运动方程。

## 2　时间尺度上非 Chetaev 型非完整力学系统 Lie 对称性及其守恒量

考虑单参数 Lie 变换群的无限小变换

$$t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q}^\sigma)+o(\varepsilon),$$
$$q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q}^\sigma)+o(\varepsilon) \tag{9}$$

其中 $\varepsilon$ 为无限小参数，$\xi_0(t,\boldsymbol{q}^\sigma),\xi_s(t,\boldsymbol{q}^\sigma)$ 是无限小变换的生成元。

引入无限小生成元向量

$$X^{(0)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s^\sigma} \tag{10}$$

它的一次扩展为

$$X^{(1)}=X^{(0)}+(\xi_s^\Delta-q_s^\Delta\xi_0^\Delta)\frac{\partial}{\partial q_s^\Delta} \tag{11}$$

以及它的二次扩展为

$$X^{(2)}=X^{(1)}+(\xi_s^{\Delta\Delta}-\xi_0^{\Delta\Delta}q_s^\Delta-\xi_0^\Delta q_s^{\Delta\Delta})\frac{\partial}{\partial q_s^{\Delta\Delta}} \tag{12}$$

根据微分方程在无限小变换下的不变性理论知，方程（8）在无限小变换（9）下的不变性表为

$$X^{(2)}[q_s^{\Delta\Delta}-g_s(t,q_k^\sigma,q_k^\Delta)]|_{q_s^{\Delta\Delta}=\alpha_s}=0 \tag{13}$$

它可表为

$$\xi_s^{\Delta\Delta}-\xi_0^{\Delta\Delta}q_s^\Delta-\xi_0^\Delta g_s=X^{(1)}(g_s)(s=1,2,\cdots,n) \tag{14}$$

称方程（14）为方程（8）的确定方程。

**定义 1**　如果无限小生成元 $\xi_0,\xi_s$ 满足确定方程（14），则称相应对称性为时间尺度上非 Chetaev 型非完整系统（1），（4）相应的完整系统（8）的 Lie 对称性。

非完整约束方程（1）在无限小变换（9）下的不变性归为如下限制方程

$$X^{(1)}(f_\beta(t,\boldsymbol{q}^\sigma,\boldsymbol{q}^\Delta))=0,(\beta=1,2,\cdots,g) \tag{15}$$

虚位移方程（2）对无限小生成元 $\xi_0,\xi_s$ 的限制表为如下附加限制方程

$$f_{\beta s}(\xi_s^\sigma-\xi_0^\sigma q_s^{\Delta\sigma})=0 \tag{16}$$

**定义 2**　如果无限小生成元 $\xi_0,\xi_s$ 满足确定方程（14），以及限制方程（15），则称相应对称性为时间尺度上非 Chetaev 型非完整系统的弱 Lie 对称性。

**定义 3**　如果无限小生成元 $\xi_0,\xi_s$ 满足确定方程（14），限制方程（15），以及附加限制方程（16），则称相应对称性为时间尺度上非 Chetaev 型非完整系统的强 Lie 对称性。

**定理 1**　对于满足确定方程（14）和限制方程（15）的无限小生成元 $\xi_0,\xi_s$，如果存在规范函数 $G=G(t,\boldsymbol{q}^\sigma,\boldsymbol{q}^\Delta)$ 满足结构方程

$$L\xi_0^\Delta+X^{(1)}(L)+\mu(t)\partial_2L(t,q_s^\sigma,q_s^\Delta)\xi_s^\Delta+$$
$$(Q''_s+\Lambda_s)(\xi_s^\sigma-q_s^{\Delta\sigma}\xi_0^\sigma)+G^\Delta=0 \tag{17}$$

以及限制条件（2）成立，则非完整系统存在 Noether 型的守恒量

$$I(t,q_s^\sigma,q_s^\Delta)=\partial_3L(t,q_s^\sigma,q_s^\Delta)\xi_s(t,q_s^\sigma,q_s^\Delta)+$$

$$[L(t,q_s^\sigma,q_s^\Delta)-\partial_3 L(t,q_s^\sigma,q_s^\Delta)q_s^\Delta-\partial_1 L(t,q_s^\sigma,q_s^\Delta)\mu(t)]\xi_0(t,q_s^\sigma,q_s^\Delta)+G=\mathrm{const} \tag{18}$$

**证明**

$$\begin{aligned}\frac{\Delta}{\Delta t}I&=\frac{\Delta}{\Delta t}\partial_3 L\xi_s+(\partial_3 L+\mu(t)\frac{\Delta}{\Delta t}\partial_3 L)\xi_s^\Delta+\\&\frac{\Delta}{\Delta t}[L-\partial_3 Lq_s^\Delta-\mu(t)\partial_1 L]\xi_0^\sigma+\\&\xi_0^\Delta[L-\partial_3 Lq_s^\Delta-\mu(t)\partial_1 L]+G^\Delta=\\&(\partial_2 L+Q''_s+\Lambda_s)\xi_s+\\&[\partial_3 L+\mu(t)(\partial_2 L+Q''_s+\Lambda_s)]\xi_s^\Delta+\\&[\partial_1 L-(Q''_s+\Lambda_s)q_s^{\Delta\sigma}]\xi_0^\sigma+\\&L\xi_0^\Delta-\partial_3 Lq_s^\Delta\xi_0^\Delta-\partial_1 L\xi_0^\Delta\mu(t)+G^\Delta=\\&L\xi_0^\Delta+X^{(1)}(L)+\mu(t)\partial_2 L(t,q_s^\sigma,q_s^\Delta)\xi_s^\Delta+\\&(Q''_s+\Lambda_s)(\xi_s^\sigma-q_s^{\Delta\sigma}\xi_0^\sigma)+G^\Delta=0\end{aligned}$$

**定理 2** 对于满足确定方程（14），限制方程（15）和附加限制方程（16）的无限小生成元 $\xi_0$，$\xi_s$，如果存在规范函数 $G=G(t,\boldsymbol{q}^\sigma,\boldsymbol{q}^\Delta)$ 满足结构方程（17），则非完整系统存在形如（18）的强 Lie 对称性及其守恒量。

如果 $\mathbb{T}=\mathbf{R}$，则 $\sigma(t)=t$，$\mu(t)=0$，于是式（23）给出了经典的非 Chetaev 型非完整系统的 Lie 对称性的结构方程[6]

$$L\dot{\xi}_0+X^{(1)}(L)+(Q''_s+\Lambda_s)(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\dot{G}=0 \tag{19}$$

而守恒量（24）也成为经典的非 Chetaev 型非完整系统的 Lie 对称性的 Noether 型守恒量

$$I=L\xi_0+\partial_3 L(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+G=\mathrm{const} \tag{20}$$

## 3 算 例

定义时间尺度 $\mathbb{T}=\{2^n:n\in\mathbf{N}\cup\{0\}\}$，假设系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}((q_1^\Delta)^2+(q_2^\Delta)^2)-q_2^\sigma \tag{21}$$

所受的非完整约束为

$$f=q_2^\Delta s-tq_1^\Delta s=0 \tag{22}$$

为非 Chetaev 型的，虚位移满足

$$\delta q_1^\sigma-\delta q_2^\sigma=0 \tag{23}$$

由方程（4）得

$$q_1^{\Delta\Delta}=\lambda,q_2^{\Delta\Delta}=-\lambda-1 \tag{24}$$

再由方程（22）和方程（24）可得

$$\lambda=-\frac{1+q_1^\Delta s}{2t+1} \tag{25}$$

于是有

$$\Lambda_1=-\Lambda_2=-\frac{1+q_1^\Delta s}{2t+1} \tag{26}$$

根据结构方程（17）和附加限制方程（16）可知

$$L\xi_0^\Delta+X^{(1)}(L)+\mu(t)\partial_2 L(t,q_s^\sigma,q_s^\Delta)\xi_s^\Delta+(Q''_s+\Lambda_s)(\xi_s^\sigma-q_s^{\Delta\sigma}\xi_0^\sigma)+G^\Delta=0 \tag{27}$$

$$(\xi_1^\sigma-\xi_0^\sigma q_1^{\Delta\sigma})-(\xi_2^\sigma-\xi_0^\sigma q_2^{\Delta\sigma})=0 \tag{28}$$

对式（27）–（28）进行求解

$$\xi_0=0,\xi_1=t,\xi_2=t,G=t^2-q_1^\Delta s-q_2^\Delta s \tag{29}$$

因此由方程（18）可知守恒量为

$$I=t^2-q_1^\Delta s-q_2^\Delta s+tq_1^{\Delta\Delta}+tq_2^{\Delta\Delta} \tag{30}$$

如果 $\mathbb{T}=\mathbf{R}$，$\sigma(t)=t$，$\mu(t)=0$ 时，由式（20）知，系统有如下守恒量

$$I=\dot{q}_1 t+\dot{q}_2 t+\frac{1}{2}t^2-q_1-q_2 \tag{31}$$

## 4 结 论

研究了时间尺度上动力系统的对称性，可有效地将连续系统与离散系统统一起来。本文则通过微分方程在无限小变换下的不变性，建立了时间尺度上非 Chetaev 型非完整系统的 Lie 对称性，给出了其存在的限制条件，最终得到守恒量。本文研究结果更具普遍性，当约束条件为 $f_{\beta s}=\dfrac{\partial f_\beta}{\partial q_s^\Delta}$ 时本文研究结果可退化为时间尺度上 Chetaev 型非完整系统的 Lie 对称性。最后，该文思想将进一步推广到时间尺度上约束力学系统的 Lie 对称性所导致的 Hojman 守恒量的研究上。

## 参考文献:


[1] LUTZKY M. Dynamical symmetries and conserved quantities [J]. J Phys A: Math Gen, 1979, 12(7): 973 – 981.

[2] 梅凤翔,吴润衡,张永发. 非 Четаев 型非完整系统的 Lie 对称性与守恒量[J]. 力学学报, 1998, 30(4): 468 – 474.
MEI F X, WU R H, ZHANG Y F. Lie symmetries and conserved quantities of nonholonomic systems of non-Chetaev's type [J]. Atta Mechanica Sinica, 1998, 30(4): 468 – 474.

[3] 梅凤翔. 李群和李代数对约束力学系统的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[4] 李元成, 梁景辉, 张毅,等. 单面非 Chetaev 型非完整系统的 Lie 对称性与守恒量[J]. 北京理工大学学报, 2000, 20(2): 150 – 154.
LI Y C, LIANG J H, ZHANG Y, et al. Lie symmetries and conserved quantities of nonholonomic systems of non-Chetaev's type with unilateral constraints [J]. Journal of Beijing Institute of Technology, 2000, 20(2): 150 –

154.

[5] 吴润衡. 非 Chetaev 型非完整系统的 Lie 对称性逆问题[J]. 商丘师范学院学报, 2000,16(4)：6 –9.
WU R H. The inverse problem of Lie symmetries of the nonholonomic mechanical systems with non-Chetaev's type constraints [J]. Journal of Shangqiu Teachers College, 2000,16(4):6 –9.

[6] 吴润衡, 邹杰涛. 非 Chetaev 型非完整系统的 Lie 对称性与 Noether 对称性[J]. 数学物理学报, 2001, 21(1)：110 –115.
WU R H, ZOU J T. On Lie symmetries and Noether symmetries of the nonholonomic systems with non-Chetaev's type constraints [J]. Acta Mathematica Scientia, 2001, 21(1):110 –115.

[7] 梅凤翔. 约束力学系统的对称性与守恒量[M]. 北京:北京理工大学出版社, 2004.

[8] 张毅. 相空间中类分数阶变分问题的 Noether 对称性与守恒量[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2013, 52(4)：45 –50.
ZHANG Y. Noether symmetry and conserved quantity for a fractional action-like variational problem in phase space [J]. Acta Scientiraum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2013, 52(4)：45 –50.

[9] 金世欣, 张毅. 相空间中含时滞的非保守力学系统的 Noether 定理[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2014, 53(4)：56 –61.
JIN S X, ZHANG Y. Noether theorem for nonconservative mechanical system with time delay in phase space [J]. Acta Scientiraum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2014, 53(4)：56 –61.

[10] HILGER S. Analysis on measure chains-a unified approach to continuous and discrete calculus [J]. Results in Mathematics, 1990, 18(1/2):18 –56.

[11] HILGER S. Differential and difference calculus-unified [J]. Nonlinear Analysis Theory Methods & Application, 1997, 30(5)：2683 –2694.

[12] HILGER S. Ein Masskettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten [D]. Würzburg：Universität Würzburg, 1988.

[13] AGARWAL R P, BOHNER M. Basic calculus on time scales and some of its applications [J]. Results Math, 1999, 35(1/2)：3 –22.

[14] BOHNER M, PETERSON A. Dynamic equations on time scales, An Introduction with applications [M]. Boston：Birkhäuser, 2001.

[15] BOHNER M, PETERSON A. Advances in dynamic equations on time scales [M]. Boston：Birkhäuser, 2003.

[16] BARTOSIEWICZ Z, PIOTROWSKA E, WYRWAS M. Stability, stabilization and observers of linear control systems on time scales [C] // Decision and Control, 2007, IEEE Conference on. IEEE, 2008：2803 –2808.

[17] BARTOSIEWICZ Z, PAWLUSZEWICZ E. Realizations of nonlinear control systems on time scales [J]. Proceedings of the Estonian Academy of Sciences Physics Mathematics, 2008, 53(2)：571 –575.

[18] BOHNER M, GUSEIN S H. Partial differentiation on time scales [J]. Dynamic Systems & Applications, 2004, 13(3)：351 –379.

[19] BOHNER M. Calculus of variations on time scales [J]. Dynamic Systems & Applications, 2004, 13(12)：339 –349.

[20] BARTOSIEWICZ Z, TORRES D F M. Noether´s theorem on time scales [J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications, 2008, 342(2):1220 –1226.

[21] BARTOSIEWICZ Z, MARTINS N, TORRS D F M. The second Euler-Lagrange equation of variational calculus on time scales [J]. European Journal of Control, 2011, 17(1)：9 –18.

[22] CAI P P, FU J, GUO Y X. Noether symmetries of the nonconservative and nonholonomic system on time scales [J]. Sci China：Phys Mech Astron, 2013, 56(5)：1017 –1028.

[23] SONG C J, ZHANG Y. Noether theorem for Birkhoffian system on time scales [J]. Journal of Mathematical Physics, 2015, 56(10)：1 –26.

[24] 张毅. 时间尺度上 Hamilton 系统的 Noether 理论[J]. 力学季刊, 2016, 37(2)：214 –224.
ZHANG Y. Noether theory for Hamiltonian system on time scales [J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2016, 37(2):214 –224.

[25] ZU Q H, ZHU J Q. Noether theorem for nonhonomic nonconserative mechanical syetems in phase spacs on time scales [J]. Journal of Mathematical Physics, 2016, 57(8):18 –56.

[26] 祖启航, 朱建青. 时间尺度上 Nabla 变分问题的非完整力学系统的 Noether 理论[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2017, 56(1):58 –65.
ZU Q H, ZHU J Q. Noether theorem for nonholonomic mechanical systems of Nabla variational problem on time scales [J]. Acta Scientiraum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2017, 56(1)：58 –65.

[27] 祖启航, 朱建青, 宋传静. 时间尺度上相空间中非 Chetaev 型非完整系统的 Noether 理论[J]. 华中师范大学学报(自然科学版), 2017, 51(1)：23 –27.
ZU Q H, ZHU J Q, SONG C J. Noether theorem for nonholonomic mechanical systems of non-Chetaev's type in phase space on time scales [J]. Journal of Central China University (Nat Sci), 2017, 51(1)：23 –27.